23/11/17

"Ειδικές συνεχείς τ.μ. και κατανομές"

(I) Ομοιόμορφη κατανομή

▲ **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Η τ.μ. X λέγεται ομοιόμορφη στο διάστημα (a,b), $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ αν το σύνολο τιμών της τ.μ. X είναι το διάστημα (a,b) και η σ.π.π. της τ.μ. X είναι:

$$f_x(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$

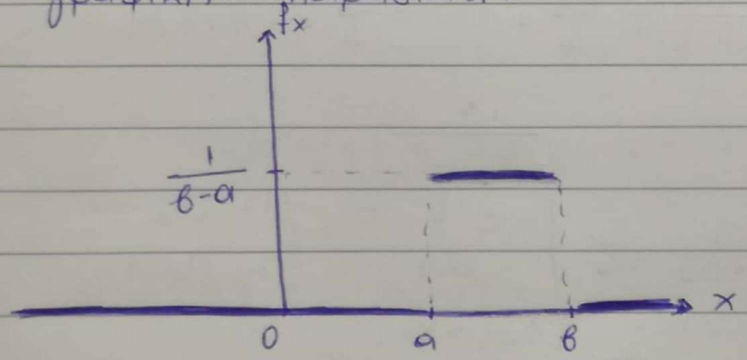
Συμβολισμός: $X\sim U(a,b)$

Ιδιότητες - Παρατηρήσεις:

1) Πράγματι, η f_x είναι σ.π.π. αφού
i) $f_x(x)\geq 0$ ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)\,dx=1$

2) Η f_x ορίστηκε στο (a,b). Επειδή πρόκειται για συνεχή κατανομή, οι πιθανότητες στα άκρα δεν αλλάζουν και άρα θα μπορούσε να οριστεί στο $[a,b]$

3) Η γραφική παράσταση:



4) $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_x(x)\overset{\text{ορ.}}{=}P(X\leq x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_x(t)\,dt=$

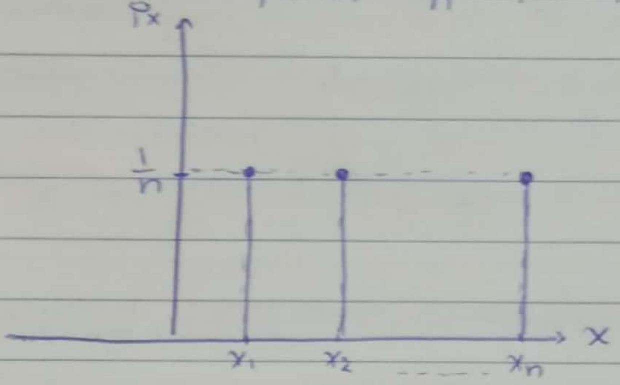
$$=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,dt=0\\[2mm] \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_x(t)dt=\int_{-\infty}^{a} f_x(t)dt+\int_{a}^{x} f_x(t)dt=\cancel{\int_{-\infty}^{a}0\,dt}^{\,0}+\int_{a}^{b}\frac{1}{b-a}dt=\frac{x-a}{b-a}, & a<x<b\\[2mm] \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_x(t)dt=\cancel{\int_{-\infty}^{a} f_x(t)dt}^{\,0}+\int_{a}^{b} f_x(t)dt+\int_{b}^{x} f_x(t)dt=\ldots=1, & x\geq b\end{cases}$$

Άρα $F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \; x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & , \; a < x < b \\ 1 & , \; x \geq b \end{cases}$

5) Διακριτή Ομοιόμορφη Κατανομή (Κατανομή της ρίψης τέλειου ζαριού)

Έστω διακριτή τ.μ. X με τιμές $x_1, \dots, x_n$ και ό.τι.

$$p_X(x_i) = \frac{1}{n} \quad , \; i = 1, \dots, n$$



Περιγράφει ένα φαινόμενο με την μεγαλύτερη τυχαιότητα

6) Έστω τ.μ. $X \sim U(a,b)$. Τότε υποδιαστήματα του (a,b) ίσου μήκους έχουν ίση πιθανότητα

<u>Δηλ.</u> Αν $(a_1, b_1) \subseteq (a,b)$ και $(a_2, b_2) \subseteq (a,b)$ με $b_1 - a_1 = b_2 - a_2$

τότε $P(a_1 \leq X \leq b_1) = P(a_2 \leq X \leq b_2)$

<u>ΑΠΟΔ.</u>

$$P(a_1 \leq X \leq b_1) = F_X(b_1) - F_X(a_1) = \frac{b_1 - a_1}{b-a}$$

$$P(a_1 \leq X \leq b_1) = \int_{a_1}^{b_1} f_X(x)\,dx = \frac{b_1 - a_1}{b-a}$$

Ανάλογα $P(a_2 \leq X \leq b_2) = \dfrac{b_2 - a_2}{b-a}$

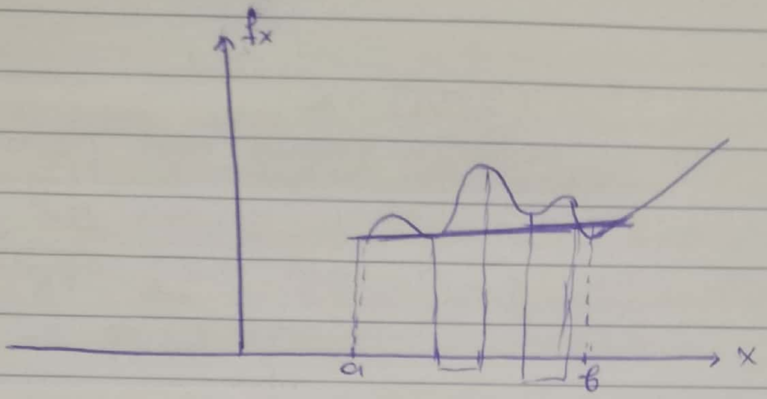
Δηλ. αν τα υποδιαστ. έχουν ίδιο μήκος τότε οι πιθανότητες είναι ίδιες

Ισχύει το αντίστροφο?

<u>Αντίστροφο:</u> Έστω μια τ.μ. X που παίρνει τιμές στο (a,b).
Έστω ότι για την X ισχύει: Οποιαδήποτε υποδιαστήματα του (a,b) ίσου μήκους παράγουν ή έχουν ίσες πιθανότητες τότε

$$X \sim U(a,b)$$

Scanned by CamScanner

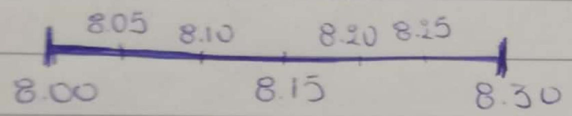


Αυτό το αντίστροφο καθορίζει το πλαίσιο εφαρμογής της ομοιόμορφης κατανομής ως ένα μοντέλο που περιγράφει το χρόνο αφίξης ανθρώπων σε ραντεβού ή συγκοινωνιακού μέσου σε στάση

Παραδ. 5.1.3

Κάθε 15' ξεκινώντας στις 8.00

Επιβάτης ⟶ (8.00 - 8.30)



Το πόσο περιμένει εξαρτάται από την ώρα που θα φτάσει στη στάση

α) P(ο επιβάτης να περιμένει λιγότ. από 5 min);

β) P(ο επιβάτης να περιμένει περισσ. από 10 min);

ΛΥΣΗ:

Έστω X χρονική στιγμή που ο επιβάτης στην τύχη θα φτάσει στη στάση. Η X τ.μ. με τιμές (8.00, 8.30)

$$X \sim U(8.00, 8.30)$$

α) Πιθανότ. $= P(8.10 \le X \le 8.15 \text{ ή } 8.25 \le X \le 8.30) =$

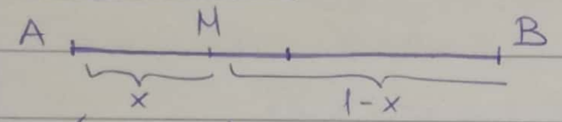
$= P(8.10 \le X \le 8.15) + P(8.25 \le X \le 8.30) =$

$= 2P(8.10 \le X \le 8.15) = 2 \cdot \int_{8.10}^{8.15} \frac{1}{8.00 - 8.30}\, dx = 2 \cdot \frac{5}{30} = \frac{1}{3}$

β) Πιθανότ. $= P(8.00 < X \le 8.05 \text{ ή } 8.15 < X \le 8.20) = \ldots = \frac{1}{3}$

Scanned by CamScanner

Παράδ. 5.1.4



$\|AB\| = \ell$

$P\left(\begin{array}{l}\text{το πηλίκο του μικρότερου} \\ \text{προς το μεγαλύτερο τμήμα} \\ \text{είναι μικρότερο του } 1/4\end{array}\right)$,

Το x είναι τυχαίο αφού το M το επιλέξαμε τυχαία

Έστω AM< MB

Έστω X μήκος του μικρότερου.

Τότε η τ.μ. παίρνει τιμές $(0, \frac{\ell}{2})$

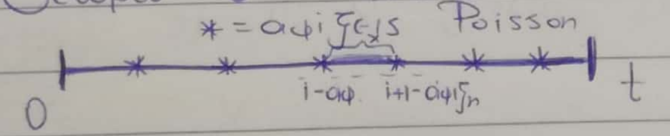
$$X \sim U(0, \tfrac{\ell}{2})$$

Άρα πιθαν. $= P\left(\frac{X}{\ell - X} < \frac{1}{4}\right) = P(4X < \ell - X) = P\left(X < \frac{\ell}{5}\right) =$

$$= \int_0^{\ell/5} \frac{1}{\frac{\ell}{2} - 0}\, dx = \frac{2}{\ell}\left(\frac{\ell}{5} - 0\right) = \frac{2}{5}$$

Εκθετική Κατανομή

Θεωρώ διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda > 0$.



Ενδιαφέρει το πλήθος $N(t)$ των αφίξεων (*) στο διάστημα $(0, t)$

Αποδείξαμε: $N(t) \sim P(\lambda t)$

Άρα $P(N(t) = \tau) = \dfrac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^{\tau}}{\tau!}$, $\tau = 0, 1, 2, \ldots$

Έστω ότι με ενδιαφέρει η μελέτη του χρόνου μεταξύ 2 διαδοχικών αφίξεων.

Έστω X χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων σε μια διαδικασία Poisson.

Ο χρόνος X είναι μια τ.μ. με τιμές $x > 0$

Συνήθως δεν πάω με την σ.π.

Για τυχόν $x>0$: $P(X>x) = P\left(\begin{matrix}\text{καμία αφιξη}\\ \text{σε χρόνο } x\geq 0\end{matrix}\right) = P(N(x)=0) = e^{-\lambda x}$,

$\lambda>0,\ x>0$

Άρα $P(X>x) = e^{-\lambda x}$, $\lambda>0,\ x>0$

Αλλά $F_X(x) \overset{ορ.}{=} P(X\leq x) = 1-P(X>x) = 1-e^{-\lambda x}$, $\lambda>0,\ x>0$

Άρα η α.σ.κ. της τ.μ. X που παριστά τον χρόνο μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων είναι:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x\leq 0 \end{cases}$$

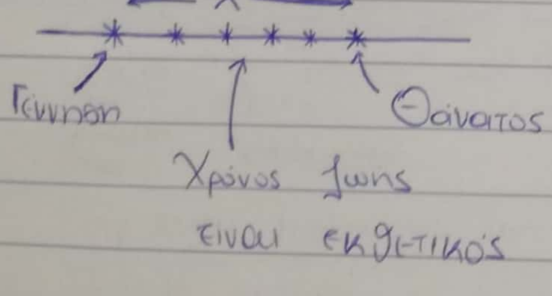
Επομένως $$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x\leq 0 \end{cases}$$

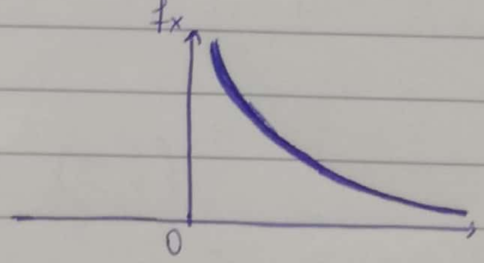
▲ __ΟΡΙΣΜΟΣ:__ Η τ.μ. X λέγεται εκθετική με παράμετρο $\lambda>0$ αν το σύνολο τιμών της X είναι $x>0$ και η σ.π.π. της X είναι:

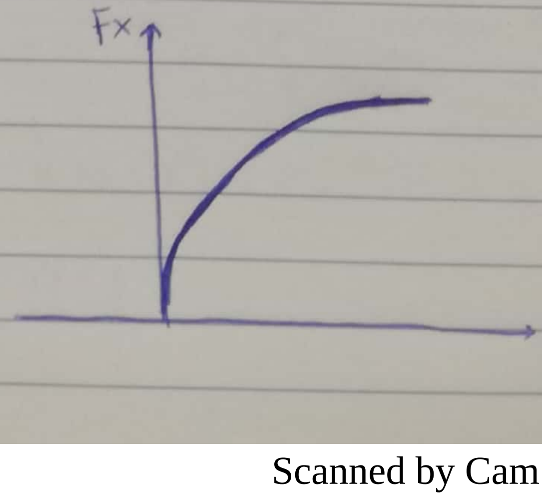
$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x\leq 0 \end{cases}$$

__Συμβολισμός:__ $X \sim Εκθ(\lambda)$

__Παρατήρηση:__







Ιδιότητα Αμνησίας της Εκθετικής Κατανομής:

Έστω τ.μ. $X \sim Εκθ(\lambda)$, $\lambda > 0$. Αν $x, x_0 > 0$ τότε

$$P(X > x + x_0 \mid X > x_0) = P(X > x)$$

ΑΠΟΔ.

$$P(X > x + x_0 \mid X > x_0) = \frac{P(X > x + x_0 \text{ κ. } X > x_0)}{P(X > x_0)} = \frac{P(X > x + x_0)}{P(X > x_0)} =$$

$$= \frac{1 - F_X(x + x_0)}{1 - F_X(x_0)}$$

Παράδ. 5.2.3

Χρόνος ζωής ~ Εκθετική με $\lambda = 1/500$

α) P(να επιζήσει περισσ. από 500 ώρες) ;

β) P(να επιζήσει μεταξύ 500 κ. 600 ωρών) ;

γ) P(να επιζήσει περισσ. από 800 ώρες δεδομένου ότι έχει ήδη επιζήσει περισσ. από 300 ώρες) ;

ΑΠΟΔ.

Έστω X χρόνος ζωής του κυκλώματος

$$X \sim Εκθ\left(\lambda = \frac{1}{500}\right)$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{500} e^{-x/500}, & x > 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/500}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Άρα:

α) Πιθαν. $= P(X \geq 500)$ — $\int_{500}^{\infty} f_X(x)\,dx$ — $1 - P(X < 500) = 1 - F_X(500) = 1 - (1 - e^{-1}) = e^{-1}$

β) Πιθαν. $=$ $\int_{500}^{600} f_X(x)\,dx$ — $F_X(600) - F_X(500)$

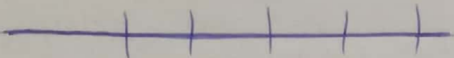
γ) Πιθαν. $= P(X \geq 800 \mid X \geq 300) = P(X \geq 500) = e^{-1}$

Παραδ. 5.2.5

Αυτοκίνητα → Πρατήριο με ρυθμό 2 αυτοκ. / 10 min

Αν αυτοκίνητο εξυπηρετηθεί ποια η πιθανότητα το πρατήριο να μείνει χωρίς αυτοκίνητο για περισσότερο από 16 min;

<u>ΛΥΣΗ:</u>



Έστω X ο χρόνος σε λεπτά μέχρι την άφιξη του αμέσως επόμενου αυτοκινήτου.

$$X \sim Εκθ(\lambda)$$

$$\begin{array}{ll|l} 10 \text{ min} & 2 \text{ αυτοκ.} & \lambda = 0{,}2 \\ 1 \text{ min} & \lambda = ? & \end{array}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.2\, e^{-0.2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0.2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Ζητώ $P(X \geq 16)$

$$\int_{16}^{\infty} 0.2 \cdot e^{-0{,}2x}\, dx$$

$$1 - F_X(16) = 1 - (1 - e^{-0{,}2 \cdot 16}) = e^{-3.2}$$

ή

$$\begin{array}{ll|l} 10 \text{ min} & 2 \text{ αυτοκ.} & \lambda = 3.2 \\ 16 \text{ min} & \lambda = ? & \end{array}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 3.2 \cdot e^{-3.2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-3.2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Ζητώ $P(X \geq 1)$

Scanned by CamScanner